



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA PE ȘCOALĂ, 13.02.2026  
CLASA a VIII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

**Notă:** Fiecare subiect se punctează de la 0 la 22,5 puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.  
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

**Problema 1** (autor Bănescu Magdalena)

a) Arătați că pentru orice numere reale strict pozitive și orice  $n \in \mathbb{N}^*$  are loc

**inegalitatea:** 
$$\frac{1+a^{4n+2}}{b} + \frac{1+b^{4n+2}}{a} \geq 4(ab)^n.$$

b) Aflați numerele reale, strict pozitive, a și b pentru care are loc egalitatea:

$$\frac{1+a^{2026}}{b} + \frac{1+b^{2026}}{a} = 4(ab)^{506}.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\frac{1+a^{4n+2}}{b} + \frac{1+b^{4n+2}}{a} = \left(\frac{1}{b} + \frac{b^{4n+2}}{a}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{a^{4n+2}}{b}\right)$	5p
<p>Aplicăm inegalitatea mediilor pentru fiecare paranteză și obținem:</p> $\left(\frac{1}{b} + \frac{b^{4n+2}}{a}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{a^{4n+2}}{b}\right) \geq 2\left(\sqrt{\frac{b^{4n+1}}{a}} + \sqrt{\frac{a^{4n+1}}{b}}\right)$	5p
$\sqrt{\frac{b^{4n+1}}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a^{4n+1}}{b}} = \sqrt{a^{4n} \cdot b^{4n}} = a^{2n} \cdot b^{2n}$	4p
<b>Finalizare</b> $\frac{1+a^{4n+2}}{b} + \frac{1+b^{4n+2}}{a} \geq 4(ab)^n.$	3p
<p>Folosim a) pentru <math>n = 506</math> și obținem egalitatea:</p> $\begin{cases} b^{2027} = a \\ a^{2027} = b \end{cases} \Rightarrow b^{2027^2} = b$ <p><b>Justificare</b> <math>b = 1 \Rightarrow a = 1.</math></p>	<p>4p</p> <p>1,5p</p>

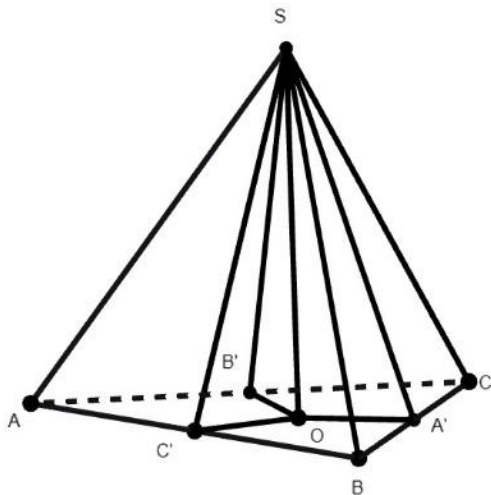
**Problema 2** (autor Liliana Niculescu, G.M. 9/2025, supliment)  
**Aflați perechile de numere întregi pentru care este verificată relația**  $x(x+1) = y(y+7)$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
$x^2 + x = y^2 + 7y \mid \cdot 4$ $4x^2 + 4x = 4y^2 + 28y$	2p
$4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 + 28y + 49 - 48$ $(2x+1)^2 = (2y+7)^2 - 48$ $(2y+7)^2 - (2x+1)^2 = 48$	2p
$(2y+7-2x-1)(2y+7+2x+1) = 48$ $(2y-2x+6)(2y+2x+8) = 48$ $4(y-x+3)(y+x+4) = 12$	5p
$y-x+3, y+x+4$ au parități diferite. $\begin{cases} y-x+3=a \\ y+x+4=b \end{cases} \quad a \cdot b = 12, a, b \text{ de parități diferite.}$ $2y+7 = a+b \Rightarrow y = \frac{a+b-7}{2}, x = \frac{b-a-1}{2}$	4,5p
$(a, b) \in \{(-12, -1), (-1, -12), (-4, -3), (-3, -4), (12, 1), (1, 12), (4, 3), (3, 4)\}$	2p
$(x, y) = \{(5, -10), (-6, -10), (0, -7), (-1, -7), (-6, 3), (5, 3), (-1, 0), (0, 0)\}$	7p

**Problema 3** (autor Livia Harabagiu)

**În piramida triunghiulară  $SABC$ , fie  $A', B', C'$  proiecțiile vârfului piramidei pe laturile  $BC, AC$ , respectiv  $AB$  ale triunghiului  $ABC$ . Se știe că  $SA' \equiv SB' \equiv SC'$ .**

- Arătați că dreptele  $AA', BB', CC'$  sunt concurente.**
- Fie  $O$  piciorul perpendicularei duse din  $S$  pe planul  $(ABC)$ ,  $O$  în interiorul triunghiului  $ABC$ . Dacă  $O$  este centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , arătați că piramida  $SABC$  este regulată.**



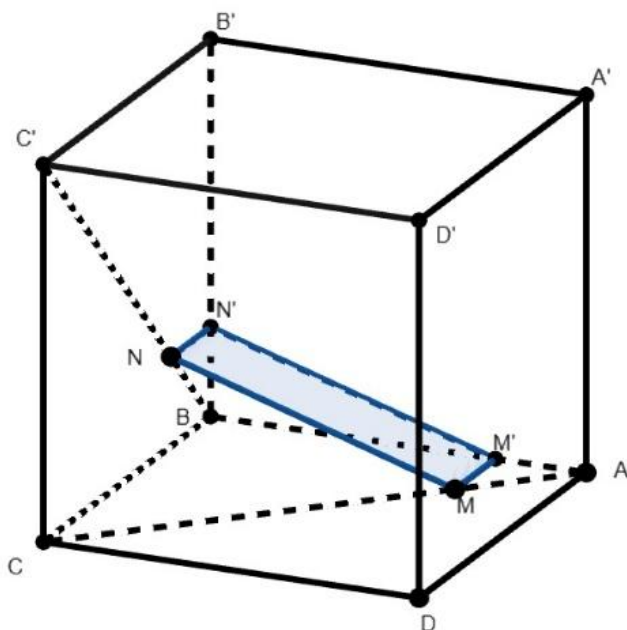
Detalii rezolvare	Barem asociat
$\left. \begin{array}{l} SI \perp (ABC), I \in (ABC) \\ \text{a) Fie } SA' \perp BC \\ IA', BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \xRightarrow{R.T.3\perp} IA' \perp BC.$ <p>Analogue, <math>IB' \perp AC, IC' \perp AB</math> (1)</p> $\left. \begin{array}{l} SI \perp (ABC) \\ IA', IB', IC' \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SI \perp IA', SI \perp IB', SI \perp IC'$	3p
<p>Comparăm <math>\triangle SIA'</math> cu <math>\triangle SIB'</math> și cu <math>\triangle SIC'</math> și conform cazului I.C.</p> $\Rightarrow \triangle SIA' \equiv \triangle SIB' \equiv \triangle SIC' \Rightarrow IA' \equiv IB' \equiv IC' \text{ (2)}$	3p
<p>Din (1) și (2) <math>\Rightarrow d(I; AB) = d(I; BC) = d(I; AC)</math> rezultă I este centrul cercului înscris <math>\triangle ABC \Rightarrow A'B \equiv C'B, A'C \equiv B'C, AC' \equiv AB'</math></p> $\Rightarrow \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} \stackrel{R.T. Ceva}{=} 1 \Rightarrow AA', BB', CC' \text{ sunt concurente.}$	6p
$\left. \begin{array}{l} \text{Din (a)} \Rightarrow O = I \\ \text{b) } O \text{ centrul cercului înscris în } \triangle ABC \\ O \text{ centrul cercului circumscris } \triangle ABC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \text{ este echilateral. (3)}$	3p
<p><math>A', B', C'</math> mijloacele laturilor <math>BC, AC, AB</math>.</p>	3p
<p><math>SC'</math> mediană și înălțime în <math>\triangle SAB \Rightarrow \triangle SAB</math> isoscel cu baza <math>AB \Rightarrow SA \equiv SB</math> (4).</p> <p><math>SA'</math> mediană și înălțime în <math>\triangle SBC \Rightarrow \triangle SBC</math> isoscel cu baza <math>BC \Rightarrow SB \equiv SC</math> (5).</p> <p>Din (4) și (5) <math>\Rightarrow SA \equiv SB \equiv SC</math> (6).</p>	2,5p
<p>Din (3) și (6) <math>\Rightarrow SABC</math> este piramidă triunghiulară regulată.</p>	2p

**Problema 4** (autor Traian Preda)

Fie  $ABCA'B'C'D'$  un cub și punctele  $M \in (AC)$ ,  $N \in (BC')$  astfel încât

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BC'} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

- Demonstrați că  $MN \parallel (ABB')$ .
- Determinați măsura unghiului dintre dreptele  $MN$  și  $AA'$ .
- Determinați măsura unghiului dintre dreptele  $MN$  și  $CD'$ .



Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Alegem $M' \in (AB)$ și $N' \in (BB')$ astfel încât $MM' \parallel BC$ și $NN' \parallel B'C'$ .	1p
Din T.F.A. obținem $\frac{MM'}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BC'} = \frac{NN'}{BC'} \Rightarrow MM' \equiv NN'$ ,	2p
Dar $MM' \parallel NN' \Rightarrow MNN'M'$ paralelogram $\Rightarrow$	2p
$MN \parallel M'N'$ , dar $M'N' \subset (ABB') \Rightarrow MN \parallel (ABB')$ .	3p
b) Notăm $AB = l \Rightarrow BN' = \frac{(\sqrt{3}-1)l}{2}$	2p
$BN' = AM' \Rightarrow M'B = l - \frac{\sqrt{3}-1}{2}l = \frac{3-\sqrt{3}}{2}l$	2p

$MN \parallel M'N', AA' \parallel BB' \Rightarrow \sphericalangle(MN, AA') = \sphericalangle(M'N', BB') = \sphericalangle BN'M'$	<b>2p</b>
$tg \sphericalangle BN'M' = \frac{M'B}{N'B} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} \Rightarrow$	<b>2p</b>
$\sphericalangle BN'M' = 60^\circ.$	<b>2p</b>
c) $MN \parallel M'N', CD' \parallel BA' \Rightarrow$ $\sphericalangle(MN, CD') = \sphericalangle(M'N', A'B) = \sphericalangle BPN'$ Unde am notat cu P intersecția dreptelor $M'N'$ și $A'B$ .	<b>2,5p</b>
Întrucât $\sphericalangle PN'B = 60^\circ, \sphericalangle PBN' = 45^\circ \Rightarrow$ $\sphericalangle BPN' = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$	<b>2p</b>